<u>Tópicos de Resolução</u>

1.a)

$$[A\,|\,B]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 1\\ 2 & -1 & 1 & \vdots & \beta\\ 3 & -3 & \alpha & \vdots & 5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & -3 & -1 & \vdots & \beta-2\\ 0 & -6 & \alpha-3 & \vdots & 2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & -3 & -1 & \vdots & \beta-2\\ 0 & 0 & \alpha-1 & \vdots & -2\beta+6\end{bmatrix}$$

- Se $\alpha\neq 1,\ \forall\beta\in R:\ r(A)=r(A\,|\,B)=n\Rightarrow$ sistema possível e determinado;
- Se $\alpha=1,\ \beta=3:\ r(A)=r(A\,|\,B)=2<n=3\Rightarrow$ sistema possível e indeterminado (um grau de liberdade);
- Se $\alpha=1,\ \beta\neq 3:\ r(A)=2<r(Ab)=3\Rightarrow$ sistema impossível.

b) Se $\alpha=0$ temos $r(A)=3=n=m\Leftrightarrow|A|\neq 0$ e logo o sistema é dito sistema de Cramer.

Se $\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ 0\right)$ é solução do sistema inicial com $\alpha=0$ também é solução do respectivo sistema condensado:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\ \frac{-1}{3}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \beta-2\\ -2\beta+6\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}1=1\\ 1=\beta-2\\ 0=-2\beta+6\end{cases}\Leftrightarrow\beta=3$$

Para $\alpha=0$, $\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3},\ 0\right)$ é solução do sistema se e só se $\beta=3$.

2. Temos:

$$\int\frac{4x}{e^{3x-2}}dx=4\int\frac{x}{e^{3x-2}}dx=4\int x\ e^{-3x+2}dx$$

Primitivando por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned}4\int x\ e^{-3x+2}dx&=4\left(-\frac{e^{-3x+2}}{3}x-\int-\frac{e^{-3x+2}}{3}dx\right)=\\&=-\frac{4}{3}xe^{-3x+2}+\frac{4}{3}\int e^{-3x+2}dx=\\&=-\frac{4}{3}x\ e^{-3x+2}-\frac{4}{9}\ e^{-3x+2}+c=\\&=-\frac{1}{3}\ e^{-3x+2}\left(4x+\frac{4}{3}\right)+c,\ \text{com}\ c\in\mathrm{R}\end{aligned}$$

3. A aproximação quadrática de Taylor a $g(x)=e^{x^2}$ em torno de 1 é:

$$P_2(x)=g(1)+g'(1)\cdot(x-1)+\frac{g''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2\text{, com } \begin{cases} g(x)=e^{x^2} \\ g'(x)=2xe^{x^2} \\ g''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} g(1)=e \\ g'(1)=2e \\ g''(1)=6e \end{cases},$$

ou seja: $e^{x^2}\approx e+2e\cdot(x-1)+3e\cdot(x-1)^2$.

4. a) Para $x<0$ a função *f* é contínua uma vez que é o quociente entre dois polinómios que são funções contínuas (desde que o polinómio no denominador não se anule, o que só acontece em $x=1$). Para $x>0$ a função *f* é contínua pois a função $\arctan(x)$ é contínua em R e portanto é contínua em R^+. Para completar o estudo basta ver se função *f* é uma função contínua em $x=0$.

Ora, *f* é contínua em $x=0$ se $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$; com efeito, tem-se:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1-x}=0 \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\arctan x=0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad f(0)=\arctan(0)=0.$$

Conclui-se que *f* é contínua em $x=0$ e logo *f* é contínua em todo o seu domínio R.

b) A função *f* é diferenciável em $x=0$ se e só se $f'(0)$ existe e é finito.

Temos:

- $f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h}{h(1-h)}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{1-h}=1$
- $f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\arctan h}{h}\underset{RH}{=}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{1+h^2}=1$

Como $f'(0^-)=f'(0^+)=1$, conclui-se que *f* é diferenciável em $x=0$ e que $f'(0)=1$.

c) Para estudarmos a monotonia de *f*, devemos determinar f', derivando cada um dos ramos para obter a função derivada em $x<0$ e em $x>0$, sendo que a derivada no ponto $x=0$ é obtida pela definição no ponto considerado.

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{se } x\leq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

Basta agora notar que a derivada está definida em todo o R e que toma valores positivos, concluindo-se que f é estritamente crescente em todo o seu domínio.

5. Tem-se:

$$\begin{aligned} G\,'(x) &= 2x\cdot\int_0^{2x} f(t)dt + x^2\cdot\frac{d}{dx}\left(\int_0^{2x} f(t)dt\right)= \\ &= 2x\cdot\int_0^{2x} f(t)dt + x^2\cdot\left(f(2x)\cdot 2\right)= \\ &= 2x\cdot\int_0^{2x} f(t)dt + 2x^2\cdot f(2x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G\,''(x) &= \frac{d}{dx}\left(2x\cdot\int_0^{2x} f(t)dt + 2x^2\cdot f(2x)\right)= \\ &= 2\cdot\int_0^{2x} f(t)dt + 2x\cdot\frac{d}{dx}\left(\int_0^{2x} f(t)dt\right) + 4x\cdot f(2x) + 2x^2\cdot f'(2x)\cdot 2 = \\ &= 2\cdot\int_0^{2x} f(t)dt + 2x\cdot\left(f(2x)\cdot 2\right) + 4x\cdot f(2x) + 4x^2\cdot f'(2x) = \\ &= 2\cdot\int_0^{2x} f(t)dt + 8x\cdot f(2x) + 4x^2\cdot f'(2x) \end{aligned}$$

Logo,

$$G\,''(x) - G\,'(x) = 2\cdot\int_0^{2x} f(t)dt + 8x\cdot f(2x) + 4x^2\cdot f'(2x) - 2x\cdot\int_0^{2x} f(t)dt - 2x^2\cdot f(2x)$$

Para $x=1$, obtém-se:

$$\begin{aligned} G''(1) - G'(1) &= 2\cdot\int_0^{1} f(t)dt + 8\cdot f(2) + 4\cdot f'(2) - 2\cdot\int_0^{1} f(t)dt - 2\cdot f(2) = \\ &= 6\cdot f(2) + 4\cdot f'(2) = \\ &= 6\cdot 1 + 4\cdot\frac{1}{2} = \\ &= 8 \end{aligned}$$